

塑性変形勾配テンソルの乗算分解による 摩擦性材料の有限変形・非線形移動硬化弾塑性モデル

Keywords: 弾塑性構成モデル; 有限変形; 異方性

東北大学 学生会員 ○千田大
 東北大学 正会員 山川優樹
 東北大学 正会員 池田清宏
 第一工業大学 正会員 橋口公一

1. はじめに

非線形移動硬化則を導入した摩擦性材料の有限変形弾塑性構成モデルについて述べる．変形勾配の弾性・塑性部分への乗算分解 $F = F^e F^p$ に加え，さらに塑性部分 F^p をエネルギー消散に関する部分 F^{pd} とエネルギー貯留に関する部分 F^{pe} とに分解して $F^p = F^{pe} F^{pd}$ とし， F^{pe} によって移動硬化の背応力がもたらされるとする^{1),2),3)}．

2. 構成モデル諸式の整理

(1) 超弾性構成式・移動硬化に関する構成式・等方硬化に関する構成式

Neo-Hooke 超弾性モデルを用いて，超弾性構成式を表す．中間配置 \bar{K} を参照する第二 Piola-Kirchhoff 応力テンソルを式 (1) 示す．材料定数 Λ および μ は線形弾性モデルにおける Lamé 定数に相当する．

$$\bar{S} = \frac{\Lambda}{2} \{ (J^e)^2 - 1 \} (\bar{C}^e)^{-1} + \mu \{ I - (\bar{C}^e)^{-1} \} \dots \dots \dots (1)$$

第二 Piola-Kirchhoff 応力テンソルに類似した移動硬化に関する背応力テンソルを式 (2) に示す． \tilde{S}^k および右 Cauchy-Green 変形テンソルに類似した移動硬化の変形変数 $\tilde{C}^{pe} := F^{peT} F^{pe}$ は，変形勾配 F^{pd} で定義される移動硬化に関する中間配置 \tilde{K} を参照するテンソルである． c は移動硬化係数である．

$$\tilde{S}^k = c \{ I - (\tilde{C}^{pe})^{-1} \} \dots \dots \dots (2)$$

等方硬化の応力変数 F と変形変数 H の関係式を式 (3) に示す． F_0, h_1, h_2 は材料定数である．

$$F = F_0 h_1 \{ 1 - \exp(-h_2 H) \} \dots \dots \dots (3)$$

(2) 下負荷面関数

ここでは von Mises モデルを用いる．中間配置 \bar{K} の応力諸量を用いて，下負荷面関数 f を式 (4) に示す．修正応力を $\bar{M}_{red} := \bar{M} - \bar{M}^k$ としており，上添字 ‘dev’ は偏差成分を表す． \bar{M} および \bar{M}^k はそれぞれ中間配置 \bar{K} の Mandel 応力テンソルおよびそれに類似した性質を持つ背応力テンソルで， $\bar{M} := \bar{C}^e \bar{S}$ ， $\bar{M}^k := F^{peT} \tilde{S}^k F^{peT}$ と与えられる． R ($0 \leq R \leq 1$) は下負荷面モデルにおける正規降伏比（正規降伏面の大きさに対する下負荷面の大きさの比）である．

$$f = \sqrt{\frac{3}{2}} \| \bar{M}_{red}^{dev} \| - R(F_0 + F) \dots \dots \dots (4)$$

(3) 塑性発展式と正規降伏比 R の発展則

中間配置 \bar{K} を参照した塑性流動則を式 (5) に示す．なお，関連流動則を用いている． $\bar{D}^p := \text{sym}[\bar{L}^p] = F^{p-T} \frac{1}{2} \dot{C}^p F^{p-1}$ ， $\bar{L}^p := \dot{F}^p F^{p-1}$ ， $C^p := F^{pT} F^p$ で， $\dot{\lambda} > 0$ は塑性乗数である．

$$\bar{D}^p = \dot{\lambda} \bar{N}, \quad \bar{N} := \frac{\partial f}{\partial \bar{M}} \bigg/ \left\| \frac{\partial f}{\partial \bar{M}} \right\| = \frac{\bar{M}_{red}^{dev}}{\| \bar{M}_{red}^{dev} \|} \dots \dots \dots (5)$$

移動硬化に関する変形変数の発展則を，移動硬化の中間配置 \tilde{K} を参照し，式 (6) に示す． $\hat{D}^{pd} := \text{sym}[\tilde{L}^{pd}] = F^{pd-T} \frac{1}{2} \dot{C}^{pd} F^{pd-1}$ ， $\tilde{L}^{pd} := \dot{F}^{pd} F^{pd-1}$ ， $C^{pd} := F^{pdT} F^{pd}$ ， $\tilde{M}^k := \tilde{C}^{pe} \tilde{S}^k$ で， b は無次元の発展係数である．

$$\hat{D}^{pd} = \dot{\lambda} \frac{b}{c} \tilde{M}^{k,dev} \dots \dots \dots (6)$$

等方硬化に関する変形変数 H の発展則を式 (7) に，正規降伏比 R の発展則を式 (8) に示す． $u > 0$ は発展係数， $\langle \cdot \rangle$ は McCauley の括弧である． R_e ($0 < R_e < 1$) は弾性限界を規定する定数である．

$$\dot{H} = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\lambda} \dots \dots \dots (7)$$

$$\dot{R} = \dot{\lambda} U(R), \quad U(R) = u \cot \left(\frac{\pi}{2} \frac{R - R_e}{1 - R_e} \right) \dots \dots \dots (8)$$

3. リターンマッピングによる応力更新

(1) 塑性発展式の増分表示

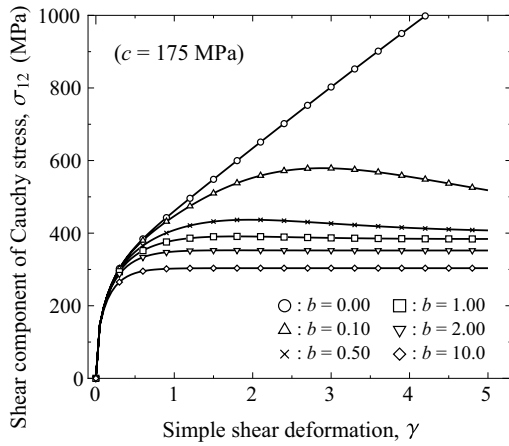
前述の塑性発展式を Δt 間で時間積分し，増分表示を導出する．式 (5), (6) を適切なプルバック操作により基準配置表示に変換すると，テンソル指数関数を用いて容易に Δt で時間積分でき，次の増分表示を得る⁴⁾．

$$C_{n+1}^p = Q_{n+1}^p C_n^p, \quad C_{n+1}^{pd} = Q_{n+1}^k C_n^{pd} \dots \dots \dots (9)$$

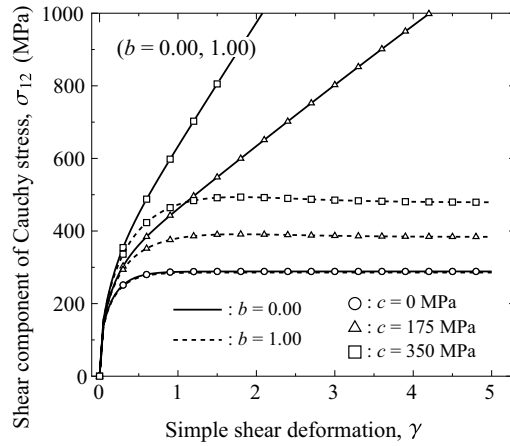
Q_{n+1}^p, Q_{n+1}^k はテンソル指数関数である．式 (7) は，一般的な後退 Euler 差分を用いて更新値 H_{n+1} が得られる．

Finite strain elastoplastic model for frictional materials with nonlinear kinematic hardening based on the multiplicative decomposition of the plastic deformation gradient tensor

Yutaka Chida^a, Yuki Yamakawa^a, Kiyohiro Ikeda^a, Koichi Hashiguchi^b: ^aTohoku Univ., ^bDaiichi Institute of Technology



(a) 発展則の定数 b による挙動の違い



(b) 発展則の定数 c による挙動の違い

図-1 移動硬化に関する材料定数による挙動の違い

(2) 弾性試行状態に基づく負荷判定

増分間で塑性変形が進展しないと仮定し、既知の時刻 t_n での値を用いて塑性変形諸量の試行値を式 (10) に示す。

$$C_{n+1}^{p(tr)} := C_n^p, C_{n+1}^{pd(tr)} := C_n^{pd(tr)}, H_{n+1}^{(tr)} := H_n \dots \dots \dots (10)$$

また、正規降伏比の試行値を $R_{n+1}^{(tr)} := R_n$ とする。これらの試行値から構成式（応力 - 変形関係式）を介して計算される試行応力を下負荷関数 f と弾性限界関数 f_{elast} に代入し、次式により負荷判定を行う。弾性限界関数 f_{elast} は下負荷関数 f 中の正規降伏比 R を材料定数 R_e で置き換えることにより定義される。

$$\begin{aligned} f_{n+1}^{(tr)} \leq 0 \text{ or } f_{elast,n+1}^{(tr)} \leq 0 &\rightsquigarrow \text{弾性除荷・中立} \\ f_{n+1}^{(tr)} > 0 \text{ and } f_{elast,n+1}^{(tr)} > 0 &\rightsquigarrow \text{塑性負荷} \end{aligned} \dots \dots \dots (11)$$

(3) リターンマッピング

式 (11) で塑性負荷と判定された場合、リターンマッピングを行う。増分表示の塑性発展式と式 (4) を連立した次式を、変形諸量 $C_{n+1}^p, C_{n+1}^{pd}, H_{n+1}$ および $\Delta\lambda$ ($:= \lambda\Delta t$) について解くことにより、時刻 t_{n+1} での更新値を求める。なお、正規降伏比の更新値 R_{n+1} は、式 (8) を Δt 間で積分した結果⁴⁾に $\Delta\lambda$ を代入することにより求められる。

$$\begin{aligned} Y_{C^p} &:= C_{n+1}^p - Q_{n+1}^p C_{n+1}^{p(tr)} = 0, \\ Y_{C^{pd}} &:= C_{n+1}^{pd} - Q_{n+1}^k C_{n+1}^{pd(tr)} = 0, \\ Y_H &:= H_{n+1} - H_{n+1}^{(tr)} - \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\lambda = 0, \\ Y_f &:= f_{n+1} = 0 \end{aligned} \dots \dots \dots (12)$$

4. 数値解析例

上述した有限変形弾塑性構成モデルにおいて、移動硬化に関する材料定数 b, c によるモデル挙動の違いを調べる。変形勾配 $F = I + \gamma e_1 \otimes e_2$ により単純せん断変形 ($\gamma = 5$) を与えた。材料定数は $\Lambda = 121.2 \text{ GPa}$, $G = 80.7 \text{ GPa}$, $F_0 = 500 \text{ MPa}$, $u = 5.0$, $R_e = 0.1$, $h_1 = 0$, $h_2 = 0$ とし、 $c = 175 \text{ MPa}$ として b の値を 0.00 から 10.0 まで変化したケースと、 $b = 0.00, 1.00$ それぞれについて $c = 0, 175, 350 \text{ MPa}$ と変化したケースの 2 通りの解析を行った。

解析結果を図-1(a), (b) に示す。図 (a) をみると、 $b = 0.00$ のときは、常に $F^{pd} = I$, $F^p = F^{pe}$ となり、塑性変形の進行に伴い移動硬化が飽和することなく進行するため、せん断応力が線形的に増加する。 b の値が大きいほど移動硬化はすみやかに飽和する。図 (b) をみると、 $b = 0.00$ のケースでは c の値が大きいほど線形的な移動硬化の程度が大きい。 $b = 1.00$ のケースでは比較的すみやかに移動硬化が飽和するが、 c の値が大きいほど硬化が飽和するまでの間の硬化の程度が大きくなり、飽和時のせん断応力も大きくなる。 $c = 0 \text{ MPa}$ では完全塑性挙動を示している。

なお、 $\gamma = 5$ の大きなせん断変形を与えたにも関わらず、せん断応力の振動など不自然な挙動は見られず、有限変形構成式としての本モデルの妥当性を示している。今後は本モデルを地盤材料のモデルへと拡張していくことが課題である。

参考文献

- 1) A. Lion: Constitutive modelling in finite thermoviscoplasticity: a physical approach based on non-linear rheological models. *Int. J. Plasticity* **16**, 469-494, 2000.
- 2) I. N. Vladimirov, M. P. Pietryga, S. Reese: On the modelling of non-linear kinematic hardening at finite strains with application to springback—Comparison of time integration algorithms. *Int. J. Numer. Methods Engng.* **75**, 1-28, 2008.
- 3) D. L. Henann, L. Anand: A large deformation theory for rate-dependent elastic-plastic materials with combined isotropic and kinematic hardening. *Int. J. Plasticity* **25**, 1833-1878, 2009.
- 4) 山川優樹, 橋口公一: 詳説: 弾塑性力学 (53)-(55), 機械の研究, 養賢堂, 第 63 巻第 11 号 (2011) から 3 回連載.